

因式分解的应用

一、知识回顾

因式分解

把一个_____化成了几个_____的形式，像这样的式子变形叫做这个多项式的_____，也叫做把这个多项式_____。

基本解法：①_____②_____
③_____④_____

1. 下列各式从左到右的变形中，属于因式分解的是（ ）。

A. $a(m+n) = am + an$

B. $a^2 - b^2 - c^2 = (a+b)(a-b) - c^2$

C. $10x^2 - 5x = 5x(2x - 1)$

D. $x^2 - 16 + 6x = (x+4)(x-4) + 6x$

二、公式法的应用

公式法

平方差公式：_____

完全平方公式：_____

例题

2. 若 $m - n = 3$ ， $mn = -2$ ，则 $m^3n - 2m^2n^2 + mn^3$ 的值为_____。

3. 已知 $\triangle ABC$ 的两边分别为 a 、 b ，满足 $a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = 0$ ，判断 $\triangle ABC$ 的形状是_____。（选填“等腰”或“等边”）

4. 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，且它的两边长 a 、 b 满足 $a^2 + b^2 - 4a - 8b + 20 = 0$ ，则这个三角形的周长为_____。

5. 计算：
$$\frac{20182017^2}{20182016^2 + 20182018^2 - 2} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

6. 已知 $a = 2018x + 2018$, $b = 2018x + 2019$, $c = 2018x + 2020$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ 的值是 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

7. 下面是某同学对多项式 $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 6) + 4$ 进行因式分解的过程 .

解 : 设 $x^2 - 4x = y$,

原式 $= (y + 2)(y + 6) + 4$

$= y^2 + 8y + 16$

$= (y + 4)^2$

$= (x^2 - 4x + 4)^2$.

(1) 该同学因式分解的结果是否彻底 ? _____ . (填 “彻底” 或 “不彻底”) 若不彻底 , 请直接写出因式分解的最后结果 _____ .

(2) 请你模仿以上方法尝试对多项式 $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2) + 1$ 进行因式分解 .

8. 因式分解 : $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = ()$.

A. $(x^2 + 5x + 5)^2$

B. $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4)$

C. $(x + 2)^2(x + 3)^2$

D. $(x^2 + 5x + 3)^2$

练习

9. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边 , 试说明 $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$ 的值一定是负数 .

10. 若 a, b, c 满足 $a^2 - 6b = -14$, $b^2 - 8c = -23$, $c^2 - 4a = 8$, 则 $a + b + c$ 的值是 ().

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

11. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 且有 $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a + c)$, 试判断三角形的形状.

12. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 且 a, b, c 满足等式 $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2$, 则该三角形是 _____ 三角形.

13. 若 n 为正整数, 求证: $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ 是个完全平方数.

14. 已知 a, b, c 满足 $a - b = 8$, $ab + c^2 + 16 = 0$, 求 $a + b + c$ 得值.

15. 有一种用“因式分解”法产生的密码记忆法, 方法是: 取一个多项式, 如: $x^4 - y^4$, 将此多项式因式分解的结果是: $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$. 再取两个值, 如: $x = 9, y = 7$, 那么各个因式的值是: $(x + y) = 16, (x - y) = 2, (x^2 + y^2) = 130$, 于是就可以把“162130”作为一个六位数密码. 如果取多项式 $x^3 - xy^2$ 以及 $x = 20, y = 2$, 那么下列密码不可能是用上述方法产生的是 ().

A. 221820

B. 222018

C. 222180

D. 201822

三、分组分解法的应用

将一个 _____ 分为 _____ 或 _____ 组，各组分别分解后，彼此又有 _____ 或者可以用 _____，这就是分组分解法。

四项式分组	二二分组：分组后各组分别用 _____ 或 _____，最后再 _____ 一三分组：“三”一定是 _____，“一”一定是 _____，最后再用 _____
五项式分组	只能“二三”分组：“二”用 _____ 或 _____ 分解，“三”用 _____ 或 _____ 进行分解，最后再 _____
六项式分组	三三分组：分组后各组分别用 _____ 或 _____ 进行分解，最后再 _____ 二二二分组：分组后各组分别用 _____ 或 _____，最后再 _____ 一二三分组：“二”用 _____ 或 _____ 分解，“三”用 _____ 或 _____ 进行分解，最后再 _____ 或 _____ 进行分解

例题

16. $2016 \times 2016 - 2016 \times 2015 - 2015 \times 2014 + 2015 \times 2015$ 的值为 ()。

- A. 1 B. -1 C. 4032 D. 4031

17. 若 a 、 b 、 c 是三角形三边的长，则代数式 $a^2 - 2ab - c^2 + b^2$ 的值 ()

- A. 大于0 B. 等于0 C. 小于0 D. 以上均有可能

18. 已知关于 x 的多项式 $2x^3 - x^2 - 13x + k$ 分解因式后的一个因式为 $(2x + 1)$ ，求 k 的值，并将这个多项式进行因式分解。

19. 若 a 、 b 、 c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $a^2b - a^2c + b^3 - b^2c = 0$ ，试判断三角形的形状。



20. 已知 $a > b > c$, $M = a^2b + b^2c + c^2a$, $N = ab^2 + bc^2 + ca^2$, 则 M 与 N 的大小关系是 ().
- A. $M < N$ B. $M > N$ C. $M = N$ D. 不能确定
21. a 、 b 、 c 是正整数, 并且满足等式 $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 2004$, 求 $a + b + c$ 的最小值.

22. 黑板上写有 $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{100}$ 共 100 个数字, 每次操作先从黑板上的数中选取两个数 a, b , 然后删去 a, b , 并在黑板上写上数 $a + b + ab$, 则经过 99 次操作后黑板上剩下的数是 ().
- A. 2012 B. 101 C. 100 D. 99

练习

23. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, 且满足 $a^2 - b^2 = c(a - b)$, 则 $\triangle ABC$ 是 ().
- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 等腰三角形 D. 等边三角形
24. 常用的分解因式的方法有提取公因式法、公式法及十字相乘法, 但有更多的多项式只用上述方法就无法分解, 如 $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y$, 我们细心观察这个式子就会发现, 前两项符合平方差公式, 后两项可提取公因式, 前后两部分分别分解因式后会产生公因式, 然后提取公因式就可以完成整个式子的分解因式了.
- 过程为: $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y = (x + 2y)(x - 2y) - 2(x - 2y) = (x - 2y)(x + 2y - 2)$, 这种分解因式的方法叫分组分解法.
- 利用这种方法解决下列问题:
- (1) 分解因式 $x^2 - 2xy + y^2 - 16$.
- (2) $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 满足 $a^2 - ab - ac + bc = 0$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

25. 已知 $\triangle ABC$ 三边 a 、 b 、 c ，满足条件 $a^2c - a^2b + ab^2 - b^2c + c^2b - ac^2 = 0$ ，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由。

26. 已知等腰 $\triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 均为整数，且满足 $a + bc + b + ca = 24$ ，则这样的三角形共有 _____ 个。

27. 已知 a 、 b 、 c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2 + b^2 = 8a + 12b - 52$ ，其中 c 是 $\triangle ABC$ 中最短的边长，且 c 为整数，求 c 的值。

28. 已知 a 、 b 、 c 为 $\triangle ABC$ 三边的长。

(1) 求证： $a^2 - b^2 + c^2 - 2ac < 0$ 。

(2) 当 $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a + c)$ 时，试判断 $\triangle ABC$ 的形状。

29. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 三边长 a 、 b 、 c 满足等式 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6ab + 10bc = 0$. 求证: $a + c = 2b$

 我学会了什么